

PARTE 5

CONDUCCIÓN EN ESTADO TRANSITORIO

CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL

Recordemos que en Estado Transitorio o Inestable

$$T = f(t, x)$$

O sea, que la temperatura es función del tiempo y también de la posición.

Cuando en un problema se involucra la variable “tiempo”, es seguro que se trata de un problema de Estado Transitorio.

Para nuestros propósitos, seguiremos asumiendo que la Conductividad Térmica k es independiente de la temperatura, y por lo tanto, constante.

Recuerden que si hacemos esta simplificación a la Ecuación General del Calor, tenemos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

donde:

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \quad \alpha : \quad \text{Difusividad Térmica [Área/Tiempo]}$$

Entonces, para un flujo de calor Unidimensional en Estado Inestable, donde no hay Generación Interna de Calor, esta expresión se reduce a:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

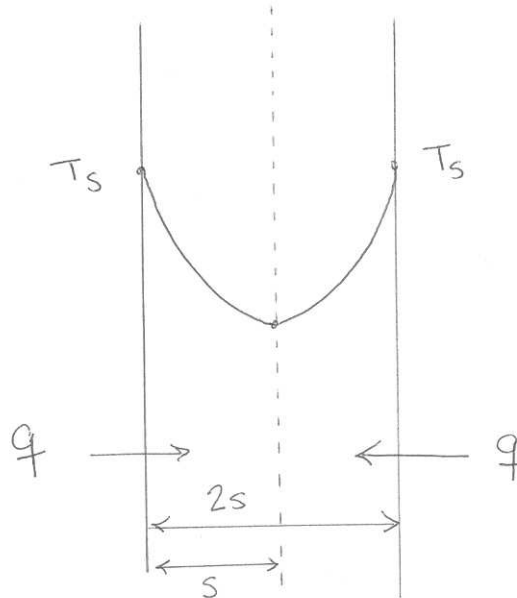
En la literatura se encuentran soluciones generales de estas ecuaciones de Estado Inestable para ciertas formas geométricas simples, como por ejemplo, una placa infinita (larga), un cilindro infinito (largo) y la esfera.

CONDUCCIÓN TRANSITORIA UNIDIMENSIONAL EN UNA PLACA PLANA LARGA

Este es el ejemplo típico de Conducción Transitoria Unidimensional.

Se tiene una placa larga, de grosor $2s$, de un material que está inicialmente a una temperatura T_a . Al comienzo del calentamiento, las dos temperaturas superficiales se elevan rápidamente, y subsecuentemente se mantienen, a una temperatura T_s .

La siguiente figura ilustra una Distribución de Temperatura para esta placa, en donde se reflejan las condiciones luego de transcurrido un período de tiempo relativamente corto (t_T) desde que comenzó el calentamiento.



De McCabe/Smith/Harriott, obtenemos la expresión ya integrada para el calentamiento de una placa de longitud infinita (muy larga), de grosor conocido, que es calentada por ambos lados por un medio a Temperatura superficial constante.

La expresión es la siguiente:

$$\frac{T_s - \bar{T}_b}{T_s - T_a} = \frac{8}{\pi^2} \left[e^{-\alpha_1 N_{Fo}} + \frac{1}{9} e^{-9\alpha_1 N_{Fo}} + \frac{1}{25} e^{-25\alpha_1 N_{Fo}} + \dots \right]$$

Donde:

T_S : Temperatura Promedio Constante de la Superficie de la Placa;

T_a : Temperatura Inicial de la Placa;

\bar{T}_b : Temperatura Promedio de la Placa en el instante t_T ;

N_{Fo} : Número de Fourier, definido como:

$$N_{Fo} = \frac{\alpha t_T}{s^2}$$

α : Difusividad Térmica;

t_T : Tiempo de Calentamiento (o Enfriamiento);

s : La Mitad del Grosor de la Placa;

α_l : $(\pi / 2)^2$

Esta ecuación también puede ser usada para el calentamiento de un solo lado de la placa, mientras que no se transfiera calor del otro lado; $\partial T / \partial x = 0$ en esa superficie, y donde s es el grosor total de la placa.

CILINDRO INFINITO SÓLIDO

Para un cilindro infinito (muy largo) sólido de radio r_m , la Temperatura Promedio \bar{T}_b , está dada por la Ecuación:

$$\frac{T_s - \bar{T}_b}{T_s - T_a} = 0.692 e^{-5.78 N_{Fo}} + 0.131 e^{-30.5 N_{Fo}} + 0.0534 e^{-74.9 N_{Fo}} + \dots$$

Donde:

$$N_{Fo} = \frac{\alpha t_T}{r_m^2}$$

ESFERA SÓLIDA

De igual manera, para una esfera de radio r_m , la correspondiente ecuación es:

$$\frac{T_s - \bar{T}_b}{T_s - T_a} = 0.608 e^{-9.87 N_{Fo}} + 0.152 e^{-39.5 N_{Fo}} + 0.0676 e^{-88.8 N_{Fo}} + \dots$$

El Número de Fourier se calcula de igual forma.

NOTA:

En cualquiera de los casos, cuando N_{Fo} es mayor que 0.1, solamente el primer término de estas tres ecuaciones es significativo, y el resto de términos se pueden ignorar.

TIEMPO

Bajo las condiciones anteriores, el tiempo requerido para cambiar la temperatura desde T_a hasta T_b , puede ser hallado rearrreglando las ecuaciones anteriores, usando solamente el primer término.

Para la Placa:

$$t_T = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2s}{\pi} \right]^2 \ln \left[\frac{8 (T_s - T_a)}{\pi^2 (T_s - \bar{T}_b)} \right]$$

Para el Cilindro

$$t_T = \frac{r_m^2}{5.78 \alpha} \ln \left[\frac{0.692 (T_s - T_a)}{(T_s - \bar{T}_b)} \right]$$

Para la Esfera

$$t_T = \frac{r_m^2}{9.87 \alpha} \ln \left[\frac{0.608 (T_s - T_a)}{(T_s - \bar{T}_b)} \right]$$

CANTIDAD DE CALOR TRANSFERIDO

También resulta de interés determinar las expresiones para la cantidad total de calor (Q_T) transferido al sólido en un tiempo t_T a través de un área unitaria de superficie.

De la definición de Temperatura Promedio, la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de una masa unitaria de un sólido, desde T_a hasta T_b , es igual a $Cp (T_b - T_a)$.

Entonces, para una placa de grosor $2s$ y densidad ρ , el área superficial total (ambos lados) es: $1/s\rho$. La cantidad total de calor transferida por unidad de área es dada por la relación:

$$\frac{Q_T}{A} = s \rho Cp (\bar{T}_b - T_a)$$

La correspondiente Ecuación para el cilindro de longitud infinita es:

$$\frac{Q_T}{A} = \frac{r_m \rho Cp (\bar{T}_b - T_a)}{2}$$

Y, para la esfera es:

$$\frac{Q_T}{A} = \frac{r_m \rho Cp (\bar{T}_b - T_a)}{3}$$

MÉTODO GRÁFICO

En la literatura se puede encontrar también una forma gráfica de resolver estos problemas.

Básicamente consta de un diagrama en donde se grafica el Número de Fourier en el eje x , versus la relación de temperaturas promedio en el eje y .

La siguiente figura es la propuesta por McCabe et al.:

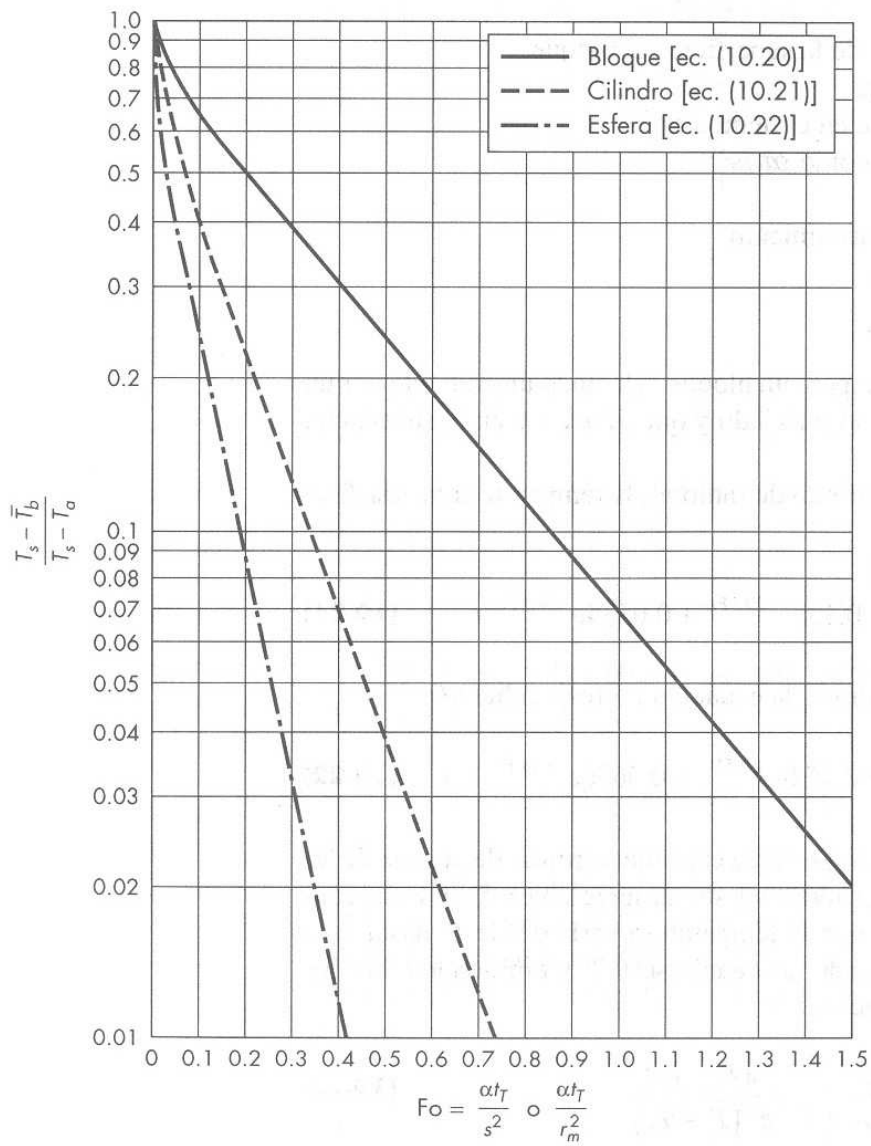


FIGURA 10.6

Temperaturas medias durante el calentamiento o enfriamiento en estado no estacionario de un bloque largo, un cilindro infinitamente largo o una esfera.

EL SÓLIDO SEMI-INFINITO

A veces, los sólidos son calentados (o enfriados) de tal forma que los cambios de temperatura en el sólido están confinados a la región cercana de una de las superficies.

Consideremos, por ejemplo, una pared muy gruesa de una chimenea, que está inicialmente a una temperatura uniforme T_a . Supongamos que la superficie interna de la pared es súbitamente calentada y mantenida a una temperatura T_s por exposición repentina a un gas caliente. Las temperaturas dentro de la chimenea cambiarán con el tiempo, pero más rápidamente cerca de esa superficie y más lentamente lejos de ella. Si la pared es suficientemente gruesa, no habrá cambios detectables en la temperatura de la superficie externa por un tiempo muy considerable.

Bajo estas condiciones, se considera que el flujo de calor está penetrando en un sólido de grosor virtualmente infinito.

Esta figura muestra la distribución de temperatura de esa pared a varios instantes de tiempo después de ser expuesta al gas caliente.

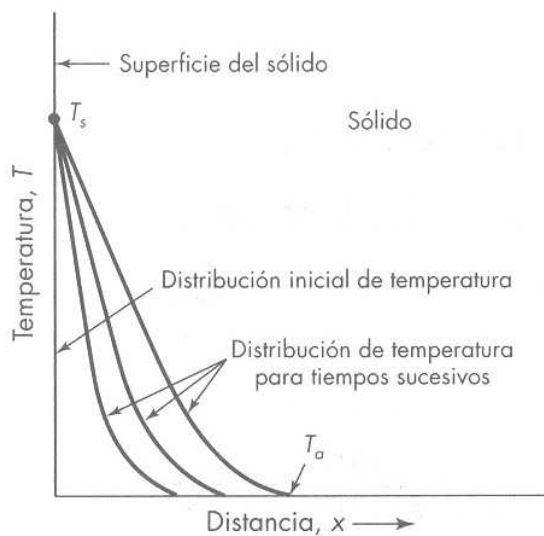


FIGURA 10.9

Distribuciones de temperatura durante el calentamiento en estado no estacionario de un sólido semiinfinito.

Para esta situación, la integración de la Ecuación, con sus condiciones de frontera apropiadas, da la distribución de temperatura para cualquier temperatura T a cualquier distancia x desde la superficie caliente.

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz$$

Donde:

$$Z = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

α = Difusividad Térmica;

x = Distancia desde la Superficie;

t = Tiempo transcurrido.

La función en la ecuación anterior se llama “Integral de Error de Gauss” o “Integral de Probabilidad”, y su representación gráfica es:

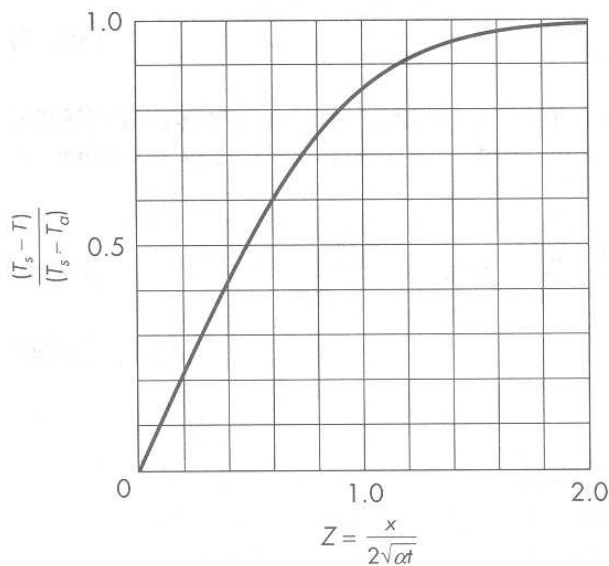


FIGURA 10.10

Calentamiento o enfriamiento, en estado no estacionario, de un sólido semiinfinito.

La distancia de penetración x_p se define arbitrariamente como la distancia desde la superficie a la que el cambio de temperatura es 1% del cambio inicial de temperatura en la superficie.

O sea,

$$\frac{T - T_a}{T_s - T_a} = 0.01$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_a} = 0.99$$

Y, la integral de probabilidad alcanza un valor de 0.99 cuando $Z = 1.82$, a partir de lo cual se obtiene:

$$x_p = 3.64 \sqrt{\alpha t}$$

Veamos ahora un Ejemplo.

CALOR TOTAL TRANSFERIDO

Para encontrar la cantidad de calor total transferido a un Sólido Semiinfinito en un determinado tiempo, es preciso calcular el gradiente de temperatura y el flujo de calor en la superficie caliente en función del tiempo.

El gradiente de temperatura en la superficie se obtiene diferenciando la ecuación que rige la distribución de temperaturas en un Sólido Semiinfinito

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz$$

lo cual conduce a:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = - \frac{T_s - T_a}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

La velocidad de flujo de calor en la superficie es entonces:

$$\left(\frac{q}{A} \right)_{x=0} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{k (T_s - T_a)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

Teniendo en cuenta que q es igual a dQ/dt , es posible integrar la ecuación anterior para obtener la cantidad total de calor transferido por unidad de área, Q_T/A , durante el tiempo t_T , como sigue:

$$\frac{Q_T}{A} = \frac{k (T_s - T_a)}{\sqrt{\pi \alpha}} \int_0^{t_T} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 k (T_s - T_a) \sqrt{\frac{t_T}{\pi \alpha}}$$